原著

数学講義を受けるSilently Engaged Studentsの学習活動についての質的横断研究
― ポストテスト，自由記述を手掛かりにして ―

紙 本 裕 一[1)]

Quantitative Cross-Sectional Research on Learning Activities of Silently Engaged Students in Mathematics Lecture: Assessing the Posttests and Free Descriptions

Yuichi Kamimoto

要　約

本稿の目的は，数学講義を受けただけで中学校生徒が課題を達成できるかどうかを分析することである。もし，それができないのであれば，その要因を生徒の視点から明らかにする。本稿では，中学生が１年，２年，３年と混在しているクラスでの授業実践を分析した。得られた知見は以下の通りである。第一に，生徒が数学的内容や数学的課題の結論に至るプロセスを単純に再構築することは不可能ではない。数学的内容や数学的課題の結論に至るプロセスを，再構築することは不可能ではない。しかし，その可能性は低い。第二に，否定文から肯定文を導く認識の更新は，どの学年でも同じような傾向であった。本研究ではサンプル数が少ないため，上記の示唆が一般的であるとは断言できない。十分な標本数での同様の検証を行うことで本論文の提案の裏付けはより強固なものとなるであろう。

キーワード：数学講義，認識の更新，プレ・ポストテスト，測る，Silently Engaged Student

1．はじめに

つまずきは誰しもが経験する活動である。つまずきについての先行研究の成果が数学授業に反映されているならば，我が国においても肯定的な意味においてつまずきを抱える生徒の質的な向上が見られるはずである。しかし，全国学力・学習状況調査の結果が示しているように，我が国において，これらの先行研究の知見は教育現場に対して反映しているとは必ずしも言えない。

反映していない理由の１つに，認知的側面についての分析で未だ出来ていない部分があることが挙げられる。数学教師がつまずきについての先行研究を把握せずに授業設計を行っていることや，社会・文化的な側面を考慮したつまずきの同定が出来ていないことも理由として考えられる。だが，認知的側面での分析から得られる充分な知見を待たないまま，新たなアプローチから検討することはつまずきの核

１）紙本　裕一　　東京未来大学こども心理学部（Tokyo Future University）

心を掴んでいるとはいえず，今ある現状をより複雑な視点で可視化するだけである。

本稿では分析が未だ出来ていない対象として『沈黙という形で参加する生徒［silently engaged student］』（Kosko, 2014）を挙げる。沈黙という形で参加する生徒という区分は，研究上での便宜的なものである。沈黙という形で参加する生徒は昨今を問わず存在する。

沈黙という形で参加する生徒は数学授業において話をしないので，授業のうちの80％近くは聴く［listening］に時間を割いている（Weinberg et. al, 2014)。故に聴くは授業への唯一の参加手段であり，教師や生徒達の話は『代弁者』（Forman & Ansell, 2001）としての役割を担うと言っても過言ではない。そして沈黙という形で参加する生徒にとって『最も手助けとなる資源は授業ノート［lecture note]』（Rensaa, 2014）である。彼らにとって聴くは授業を受ける上での主たる活動であるにも関わらず，我が国においては「話を聞くことが形骸化している現状がある」（森本，2006)。更に，話を聴かない，もしくは話を聴けない生徒が増えている現状も指摘されている。数学科も例外ではなく，数学教師は授業づくりで苦心している。このような状況から，沈黙という形で授業に参加している生徒達の学習の困難性が見過ごされている。以下では授業を全て「講義」と表記する。本稿で扱う数学授業とは，教師からの説明が続く授業を想定するものとする。

本稿の目的は，数学講義を受けただけで生徒が課題を達成するのかどうかを分析し，できない場合については，その要因を生徒の視座から明らかにすることである。本稿では，中学生の１年，２年，３年が混在しているクラスでの授業実践を分析対象とする。

筆者は，数学講義が中学校での数学授業の一般的な様式であるとは捉えていないことを，ここでお断りしたい。

2．分析対象の概要

（1）参加者の概要

本節では，分析対象となる授業の概要を述べる。この授業は公益財団法人マツダ財団と広島大学との連携事業で行われている「科学わくわくプロジェクト」の平成27年度ジュニア科学塾で行われたものである。「数と量から探る自然のメカニズム」をテーマとして，全部で６回の授業が企画された。この授業はその中の第１回目に行われたものであり，その題目は『「測る」を数学する』というものであった。参加している生徒達は，中学受験時での偏差値が60以上の中学校に在籍しており，本時においては教師が説明する状況が終始行われた。筆者はこの講座のTAとして参加した。授業に参加した生徒は広島県在住の国立・私立中学生23名である。内訳としては１年が８名，２年が10名，３年が５名である。本時での段階でいずれの生徒も「測ることが出来るとは連分数表記が出来る，ユークリッドの互除法で記述できる」ことは未知であった。

（2）選定した理由

この授業を分析対象としたのは，２つの理由がある。１つは，生徒の発言によって授業が構成される状況が一切遮断され，教師の説明だけで授業構成が設計されていた為である。一般的に，中等教育での数学授業では，生徒の外化活動がどこかで取り入れられ，その産物を対象として，授業が更に展開されることが多いのが実情である。しかしそれだと，教師からの提示だけが続くような状況ではない上に，学習者は黙って授業に終始参加する状況ではなくなる。そのため，大学の講義と同じような状況を設定する必要があった。

もう１つは，音声情報を単に授受するだけでは認識の更新が生まれないような題材と，それに対する話術が教師側で仕組まれていたためである。

この授業で扱われた題材は，YBC7289の石板（図1）であった。石板に出てくる対角線の長さは連分数表記が出来ず，ユークリッドの互除法でも共通単

位が出てこない。その為，教師は測ることが出来ない場合の数学的意味（共通単位がない，連分数表記ができない，ユークリッドの互除法で表すことができない）を強調していた。しかし，元々は「測ることが出来る」というテーマであったため，学習者は自力で測ることが出来ない内容から測ることが出来る（共通単位がある，連分数表記ができる，ユークリッドの互除法で表すことができる）場合の数学的意味を導くことが要求されていた。仮に話を聴いていたとしても，測ることが出来る場合の数学的意味を再構成するためには，聴いた内容を否定によって更新しなければならなかった。既知の概念を適用できなかった否定的対象を肯定的に捉えなおすために否定が用いられる必要があった（岩崎，1992）。提示された内容に対して，単に話を聴いているだけでは測ることが出来るときの数学的意味を構成することが出来ない状況が設定されているというのが２つ目の理由である。

（３）授業の概要

「測る」を数学する授業は全部で３時間あったが，その中でも本稿は，YBC7289の石板を用いて「対角線の長さを測る」ということの数学的意味を授業する場面（1.5時間分）に焦点をあてた。数学的には，測ることが出来るとは連分数表記が出来る，もしくはユークリッドの互除法で共通単位がある場合を指す。逆に測ることが出来ないとは連分数表記が出来ない，もしくはユークリッドの互除法において共通単位がない場合を指す。

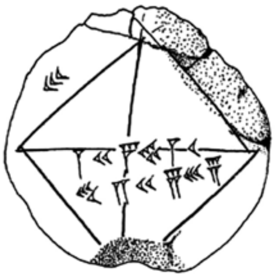

図１　YBC7289の石板

授業後には確認テスト，自由記述の両方を実施した。確認テストは「よことたての比が３：４の長方形があります。よこを３とすると，対角線の長さはいくらになりますか。考え方も書いてください」という問題である。この問題は，連分数表記だとどのように記述できるのかを意図している。自由記述，確認テストの問題については事前に教師の確認・承諾を取っている。授業前にはメモ用紙を配布した。

メモの取り方の説明は配布時に筆者が行った。メモを取る際は「測ることが出来るとはどういうことか」という内容を記録するように指示した。

授業における教師の説明の概要を述べると以下の通りである（表２）。それぞれの概要におけるプロトコルのうち，測ることが出来る場合，測ることが出来ない場合での数学的な意味を説明したものは巻末１に載せた。教師は口述での説明をしながら，ホワイトボードに記述をしていた（図２）。

冒頭（～５分）ではYBC7289の粘土板について，対角線の長さがくさび型文字で記述されていることが説明された（①）。ただし，この段階ではユークリッドの互除法で表せないことや連分数表記が出来ないということについての説明はなかった。次に，有限回の操作で長さを測ることが出来るという事象を数学化すると，ユークリッドの互除法で表すことが出来るということが，教師から説明された（～15分）。この時間，測ることが出来る場合，ユークリッドの互除法で表すことが出来るということが板書にも具体例で示された（②）。更に，ユークリッドの互除法で表すことが出来ると，連分数表記も可能であることが加えて説明され，板書にも示された（～30分：③）。次にYBC7289の対角線の長さを測ることに焦点があてられた（～70分）。ここでは測れないということの意味が再帰性という概念によって示された。長さを測ることが出来る場面と異なって，この場面では「いつまでたっても」，「共通単位がない」，「単位が見つからない」といった言葉を教師は何度も口述し，強調していた。そしてその後，測ることが出来ない場合での連分数表記が板書に示された（④）。ただし，板書に示された表記は有限回の場合で，口述で「いつまでも続く」と説明が為された。これら

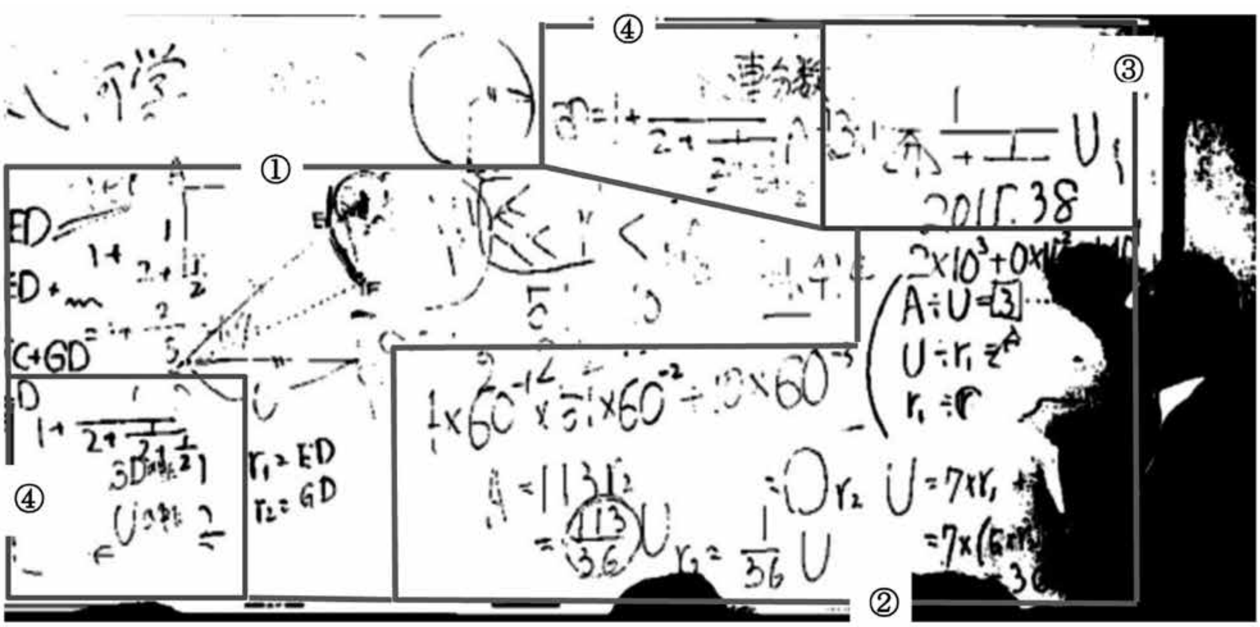

図２　教師が残した視覚的情報【番号①～④の内容が教師の口述による説明に沿って順に記述された】

の授業の後,確認テストと自由記述が実施された（～90分)。自由記述と確認テストは，一柳（2012）でも用いられている再生記述，直後再生課題と同一の手順に従った。自由記述では「測れるとはどういうことか？測れないとはどういうことかについて記述してください」と指示を出した。確認テストでは授業で扱った方法で問題に取り組むように指示を出した。

表２　測るとは何かについての授業の概要

授業開始	教師の説明の概要
～５分	YBC7289の概要が説明される。
～15分	ユークリッドの互除法を用いて，長さを測ることが出来る場合についての数学的意味が説明される。 （測ることが出来る場合のユークリッドの互除法が板書されていた）
～30分	測ることが出来る場合において，ユークリッドの互除法から連分標記が出来るという説明が為される。 測ることが出来る場合の数学的意味の説明が口述で為される。 （測ることが出来る場合の連分数表記が板書されていた）
～70分	YBC7289の石板の意味が再び説明され，測ることが出来ない場合の数学的意味が説明される。 （測ることが出来ない場合での連分数表記が示されても，測ることが出来ない場合のユークリッドの互除法は表記されなかった）
70分～90分	確認テストと自由記述が実施される。（板書はそのまま残される）

３．分　析

長さを測ることが出来るのは，ユークリッドの互除法や連分数で表記が出来る場合であると口述で説明が為されていた。故に，互除法や連分数で表記しようとする記述がみられる場合，教師からの授業を受けて測ることが出来る場合の数学的意味を再構成しようとした形跡があると判定した。一方で，三平方の定理や相似な図形の性質などで対角線の長さを求めたとしても，そこから互除法や連分数で表記していない時，この場合は測ることが出来る場合の数学的意味は再構成が出来ていないと判定した。例えば，図３の解答は数学的意味が再構成できていないと判断される。

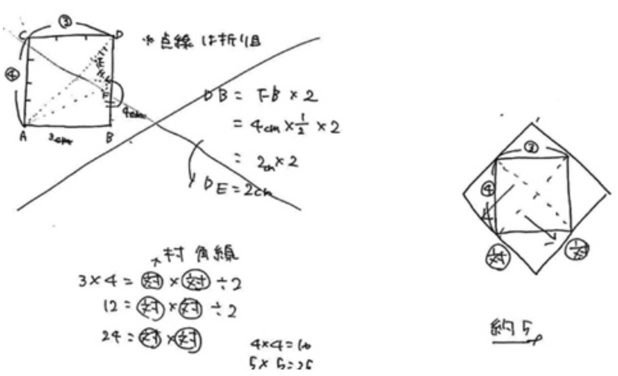

図３　生徒Ｆの確認テストの解答

自由記述では，測ることが出来るとはどういうことかの記述が出来ているかどうかを分析した。授業の授業では測ることが出来る場合と，測ることが出来ない場合の両方が説明された。板書には，測ることが出来る場合についての数学的記述が終始残されていた。自由記述では，「測れないとはずっと続いていく」という目的語がない記述もみられた。何が続くのかという言及が為されていないものは，記述では×と判定した。

例えば図４のような解答の場合，気付いたことは記述できていても，測れるとはどういうことかという問いに対する答えとなっていないため自由記述では×と判定をした。

自由記述においては，測ることが出来る場合の記述，

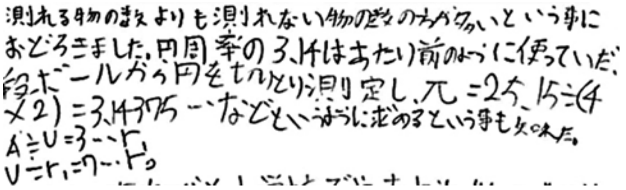

図４　生徒Ｄの自由記述

測ることが出来ない場合のいずれの記述もある解答があった。このような生徒については判定をＡＢとした。ここでのＡとは測ることが出来る場合の記述があるということを意味し，Ｂは測ることが出来ない場合についての記述があることを意味する。

また図６のように，測ることが出来る場合のみにつ

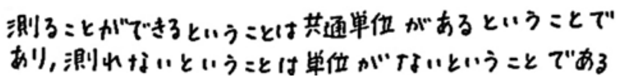

図５　生徒Ｍの自由記述

いての記述がある時は判定をＡとした。

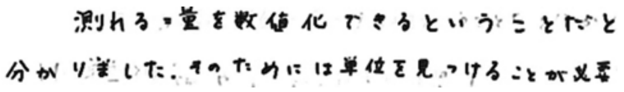

図６　生徒Ｈの解答

４．分析結果

結果は以下の通りである（表３）。表３について，ＡからＨは中学１年生である。ＩからＲは中学２年生である。ＳからＷは中学３年生である。

確認テストの分析を通じて，教師からの授業を受けて連分数表記やユークリッドの互除法で記述しようと試みていたのは２３人中５人であった。

自由記述において，Ａのみ○の生徒は５人であった。ＡＢ両方ともが○の生徒は８人であった。Ｂのみ○の生徒は５人であった。

確認テストでは○，自由記述ではＢが○の時は，

表３　分析結果

生徒	自由記述Ａ	自由記述Ｂ	確認テスト
Ａ （中１）	×	○	×
Ｂ （中１）	○	○	×
Ｃ （中１）	×	○	×
Ｄ （中１）	×	×	×
Ｅ （中１）	○	○	×
Ｆ （中１）	×	×	×
Ｇ （中１）	○	×	×
Ｈ （中１）	○	×	○
Ｉ （中２）	×	×	○
Ｊ （中２）	×	○	×
Ｋ （中２）	×	○	×
Ｌ （中２）	○	×	×
Ｍ （中２）	○	○	×
Ｎ （中２）	○	○	○
Ｏ （中２）	×	×	×
Ｐ （中２）	×	×	×
Ｑ （中２）	○	○	×
Ｒ （中２）	○	○	×
Ｓ （中３）	○	○	×
Ｔ （中３）	×	○	×
Ｕ （中３）	○	○	○
Ｖ （中３）	○	×	×
Ｗ （中３）	○	×	○
合計	13	13	5

※Ａは測ることが出来るとは，Ｂは測ることが出来ない記述があることを示す

生徒は教師からの直近の説明を字義通りに記述し，問題も解いていたと判断できる。そのため，教師が口述で授業する意味を理解することに主として従事していたと推定される。頼りになる情報は板書で提示されているユークリッドの互除法，連分数表記で

あると判断される。問題の解く手掛かりを板書に求める一方で，話を聴くときは字義通りに話を聴くという状況であったと推察される。

確認テストでは×，自由記述ではＢが〇の時は，生徒は教師からの説明を字義通りに捉えながらも，自分の知っている既習事項をレンズとして問題が解けるかどうかを判定していたものと思われる。つまり，自分の知っている知識に依存している。

確認テストでは〇，自由記述ではＡが〇の時は，生徒は教師からの説明を字義通りに捉えながら，その一方で測ることが出来る場合の数学的意味を導くことが出来ている。測ることが出来る場合の数学的意味を自由記述しようとすれば，聴いた内容を再生し，その上で，直近まで聴いていた測ることが出来ない場合の説明内容を否定によって更新する必要があった。測ることが出来ない場合についての対象を肯定的に捉えなおすために，否定が再び用いられる必要があった。生徒は授業を受けているいずれかの過程において測ることが出来る場合の数学的意味を獲得できていったものと推定される。

確認テストでは×，自由記述ではＡが〇の時は視覚的根拠となる板書が提示され，音声では理解できても，数学的に記述が出来なかったと推察される。これは，言明を数学的に形式化できなかったところに課題があるものと思われる。

確認テストでは×，自由記述ではＡもＢも×の時，測ることが出来る場合のいずれの記述もない時は，メモやふきだしなどでどのような記述があったかで判断した。もしも，測ることが出来る場合や測ることが出来ない場合でのキーワードとなるメモやふきだしなどが観測された場合，これは話を聴いていた間は，字義通りに聴いていたと推察される。

5．議　論

（1）分析結果から得られる解釈

この授業分析から得られる示唆は次の２つである。１つは教師による口述の説明を受けるだけでは，数学的内容や数学的課題の結論までに至る過程を再構成することは，未習状態で受講する生徒達にとって不可能ではないが，可能性は低いというものである。当たり前の結果といえばそうかもしれないが,「沈黙を通じて授業に参加する生徒の増加が，学年が増えるにつれて増加する」（Yoneyama, 1999）という指摘がある中での本稿での示唆は，中等教育において数学でつまずく生徒が増える要因の１つを示していると思われる。もう１つは，否定の言明から肯定の命題を導くという認識の更新が，講義という状況では一様にしてどの学年であっても類似した傾向にあるというものである。確かに，相対度数で比較すれば数値は異なっているので，学年に違いが見られるという結論に至るかもしれない。

（2）総合的議論

本時での課題設定は，測ることが出来るとはどういうことかという内容であった。それに対して，授業では，YBC7289の石板を対象としていた。そのため，測ることが出来ない事例が対象モデル［model of］となっていた。岩崎（1992）の言葉を借りれば,「Ａであることを規定するすべての非Ａが，Ａの本質である」（p.16：図７）．従って，経験的に測ることが出来る（Ａ）という認識を数学的認識に更新するためには，測ることが出来ないという事象（¬Ａ）を対象にする必要があった。

「見つけられないということは，いつまでたっても

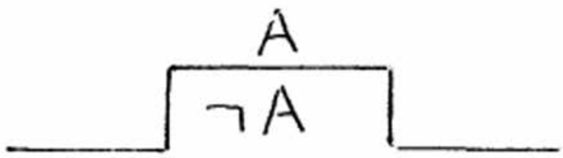

図7　Figure of Substance（岩崎，1992, p.16）

厳密には測ることはできないわけです。単位がないんだから。新しい単位があればそれを単位にして測ることができるわけです」と授業者は発言している。測ることが出来るを，数学的に一般化すると互除法や連分数表記が出来るということである。授業者は，新しい単位で表すことが出来るかどうかが，測るこ

とが出来るかどうかを決定づける要因であると発言の中で示している。

YBC7289の石板を題材として，再帰性がないことで，数学的に測ることが出来るという「上昇的否定」を授業者は提示していた。そして，新しい単位で表すことが出来るかどうかで測ることが出来るかどうかが決定されるという，日常経験から得られない考え方が提示され，「下降的否定」が示されていた。それによって，生徒達の中に内在する測ることに対する秩序を崩すよう授業者は生徒達を誘導していた。測ることが出来るのFigure of Substanceは再帰性であり，認識を更新する本質は，新しい単位で表すことが出来るかどうかという通約可能性であった（図８）。参照的活動の中に，測ることが出来ないYBC7289を取り入れることで，再帰性を手掛かりに一般化の活動が示されていた。

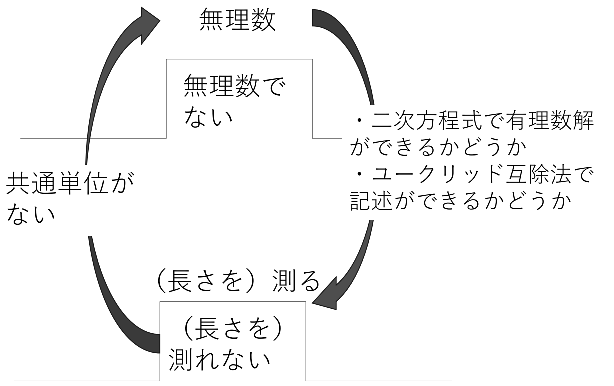

図８　測ることが出来る場合での Figure of Substance

ユークリッドの互除法や連分数表記は形式的に表されていなかった。だがGravemeijer（1999）の４つのレベルのうち，下から順に高めていくように授業展開が為されていた。

生徒の中には，話を聴いていなかったと判断された者もいた。三平方の定理を用いて，確認テストの問題を解いていたのは生徒Ｆ，生徒Ｊ，生徒Ｔの３名であった。この３名については，自由記述において，測ることが出来るとは何かについての記述があれば，彼らは内容を既に熟知した上で授業に臨んでいたものと判定をすることが出来た。しかし，３人の自由記述は測ることが出来ない場合の記述，もしくは無回答であった。その上で，確認テストでは何故か答えが5となることを導いていた。もしも，授業内容を事前に知り得ていたのならば，自由記述において測ることが出来る場合の記述が書かれているはずである，何故なら測ることが出来るとはどういうことかの口述は既に行われており，視覚的情報で測ることが出来る場合についての数学的意味は提示されていた為である。だが実際はそうではなかった。このことから，彼らは授業者が提示された方法で問題に取り組もうとしなかったことを意味する。つまり授業者の話を聴いていたようで，聴いていなかったということを指している。

聴く活動が機能していなかった要因の１つは，YBC7289を用いたことが考えられる。授業の最後まで残った板書は，測ることが出来る場合での互除法と連分数表記が記されていた。しかし，教師が話している内容は，当初測ることが出来る場合の例であった。後半についての板書はほとんどなくYBC7289の石板の対角線の長さを測ることについての説明は殆どが口述によるものであった。直近で聴いた内容と視覚的に提示されている数学的内容では相反していた。生徒達は日ごろの授業から視覚的な表記を見ている。更に聴覚的情報と視覚的情報は相補的な関係がある（Skemp, 1987）。だが，今回のように視覚的情報に引っ張られたまま，直近で聴いた内容を埋め込んでしまうと，測ることが出来る場合での視覚的情報，すなわち連分数表記と互除法表記が測ることが出来ない場合での聴いた内容とが組み合わさって，混乱を招く可能性がある。その為，三平方の定理を用いることで問題を解くことが出来ればそれで大丈夫であると思い込み，確認テストでは三平方の定理を用いるも自由記述では無回答であったという状況を作り出したものと考えられる。

算数科授業で扱われる多くの内容は，肯定的命題が多い。それは算数が，「ものの世界に近いところで算数が営まれることを物語っている。換言すれば算

数には，数学とは比較にならないほど豊富に，現実に回帰できる具体的場面がある」（岩崎，1992，p.15）からである。

これに対して，数学科授業では否定命題への対処が算数科の倍以上要求され（岩崎，1992），それらも含めて思考の論理を整理することが要求される。形式的な操作を遂行するためには対象の言語的規定や記号化は不可欠であるが，そこには否定が数多く伴う（岩崎，1992）。

前期中等教育の段階では算数科授業で習得した学習方法と数学科授業で習得した学習方法が混在化している。本時が行われたのは５月であったので，本研究での中学１年生は，入学して間もない中学１年生であった。彼らの場合，算数科授業で会得した学習方法がまだ身体化されているために，算数科授業での学習方法で授業に臨んでいたと思われる。測ることが出来ない場合について記述している生徒が中学１年生では25％であった。測ることが出来ない場合についての記述をしているということは，直近で聴いた内容をそのまま言語化していることになる。中学１年生の自由記述の中には，測ることが出来る場合と測ることが出来ない場合の数学的意味を混同している解答もあった（図９）。

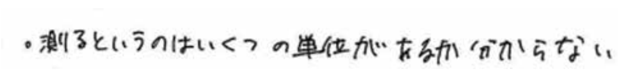

図９　生徒Cの自由記述の解答

今回の授業の場合，算数科に見られる代表的な練り上げという議論は，授業には存在し得ない。そのため，聴いた内容には可謬性と蓋然性が伴い（鷲田，1999），ヴィゴツキーの発達の最近接領域［ZPD］でいう，子どもがある課題を大人や自分より能力の高いものと共同することによって解ける発達の水準に持ち上げることが出来ない制約が生じていた。その結果，子どもがある課題を１人で解くことが出来る発達の水準のまま解決志向とする作用が働き，蓋然性の土台の上に教師が提示された視覚的情報と聴覚的情報を組み合わせることが要求されていた。このような環境の違いから，経験的概念から捉えようとする傾向がどの学年においても生じた可能性があると推察される。

ピアジェの発達理論によれば，12歳以降では形式的操作期に突入する。形式的操作期では，言明から命題を構成するだけでなく，それを論証することが出来るようになると言われている。自由記述を見ると，学年順に37.5％，50％，80％の生徒が自由記述において○であった。形式的操作にも順応し，中学校数学で扱われる否定的規定の経験量の違いもあって，ものの世界に近いところで算数が営まれる思考方法で講義には望んでいなかったと推察される。つまり，今までの学習方法が充分に身体化されているために起きたものと推察される。

６．本稿での成果と今後の課題

本稿で得られた成果は次の２点である。第１に，生徒が数学的内容や数学的課題の結論に至るプロセスを単純に再構築することは不可能ではない。数学的内容や数学的課題の結論に至るプロセスを，再構築することは不可能ではない。しかし，その可能性は低い。第２に，否定文から肯定文を導く認識の更新は，どの学年でも同じような傾向であった。本研究の成果は示唆が一般的であると断言することはできない。あくまでも可能性を提言したまでに過ぎない。標本数が充分な上で同様の検証をすることで本稿の示唆についての裏付けがより強固なものとなるであろう。

本稿では扱えなかった部分もあり，課題も残されている。以下では，今後更に分析していかなければならない課題を述べる。

１つは，他の状況で同様の実験を行った上で，生徒の思考過程を分析することである。例えば，同じ環境設定でも違う内容で実施すれば本稿の示唆は異なったものになるかもしれない。

２つ目に，表層的には話を聴いていても，認識の更新ができない要因をより詳細に検討することである。もしも話法が全てを決めるのだとすれば，学校

を予備校化すれば良いだけの話である。だが，予備校化しても出来ない人は出来ない。聴いても話が理解できない生徒もいる現状がある以上，話の再構成を質的に変えてしまう言語的本質や社会的要因に触れながらより深く言及する必要がある。

付記

本稿は，以下の原稿に大幅な加筆・修正を行ったものです。

紙本裕一・岩崎秀樹（2016）.「数と量から探る自然のメカニズム－「測る」ことの数学的翻訳とその精緻化－」,『平成27年度わくわくプロジェクト報告書』，35-41.

引用・参考文献

Forman, E. & Ansell, E. (2001)."The multiple voices of a mathematics classroom community", *Educational Studies in Mathematics,* Volume 46, Issue 1, pp 115-142

Gravemeijer, K. (1999)."How emergent models may foster the constitution of formal mathematics", Mathematical Thinking and Learning, 1(2), pp.155-157.

一柳智紀（2012）.『授業における児童の聴くという行為に関する研究：バフチンの対話論に基づく検討』．風間書房.

岩崎秀樹(1992).「数学学習における「否定」の研究（１）」，日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』，25, pp.13-18.

Kosko, K.W. (2014)."What Students Say About Their Mathematical Thinking When They Listen", *School Science and Mathematics.* Volume 114, Issue 5, pp.214–223.

森本明（2006）.「算数の授業における「聞く」という行為への接近」，日本数学教育学会誌『算数教育』，88(12), pp.11-18.

Skemp,R,R.(1987). *The psychology of learning mathematics.* L. Erlbaum Associates. Expanded American ed

鷲田清一（1999）.『聴くことの力－臨床哲学試論－』，阪急コミュニケーションズ；東京.

Rensaa, R.J. (2014)." The impact of lecture notes on an engineering student's understanding of mathematical concepts", *The Journal of Mathematical Behavior,* 34, 33-57. DOI: 10.1016/j.jmathb.2014.01.001

Weinberg, A. et.al. (2014)."Students' sense-making frames in mathematics lectures", *The Journal of Mathematical Behavior,* Volume 33, 168–179. DOI: 10.1016/j.jmathb.2013.11.005

Yoneyama, S. (1999). *The Japanese high school: silence and resistance.* Routledge; London

巻末１　測ることが出来る，測ることが出来ない場合での授業者の説明

開始時間	授業者の説明
10分	もう割り切れちゃったとしましょう。そうするとどうするかというかというと，これが新しい単位（r2）になって，測りたいものがこの新しい単位のもとで測れたとなるわけです。これが，単位がいくつ分あるかということなんです。
21分	Ｕを単位にしたいのなら，r_2はちょっとした計算が必要ですが，1/36Uで，A=113U/36がＵで測ったときの測定値になるわけです。僕は３段目で割り切れちゃったといったけれど，これが４段，５段と…割り切れても，割り切れた値が小さな単位で元に戻すことができるわけです。 一般的には，後で習うわけですが，連分数という分数なんですが，連分数で表すことができて，（さっきの式は）こうなります。Ａは，最初に３が，そしてここに７を入れて，この値をこう入れてこういうのを連分数というわけです。商を持ってくると，必ずこのような形になるわけです。 ここで言いたいことというのは，測れるというのは，最終的には一番小さな単位でちゃんと，単位で割り切れるとき，単位がある，だからこういう風に表現できる，こういう風に分数で表現できるというわけです。ということは逆にいつまでたっても，いつまでたっても割り切れなかったら…どこまで行ったってあまりが出てしまうと，単位が見つからない。見つからないということは，単位がいくつ分ですかと聞いたわけですから，その量は測れないということなんです。
24分	正方形の一辺の長さを１として対角線の長さを測ろうとしたわけです。ところがいつまでたっても共通単位，ここでいうr_2の共通単位が見つからないんです。いつまでたっても見つからない。
25分	ここに書き表しているというのは，ここでこの対角線を測っているんじゃなくて，彼らは計算法を知っていて，いつまでたっても続くよということをこの数値で表していると考えたらいいんです。

開始時間	授業者の説明
41分	GDを新しい単位にして，EDを測るわけです。もう小さくなって測りきれないでしょう？さあ，ここから先は，頭の中で考えないといけない。
42分	ここで正方形が現れるわけですから，何度でも繰り返されるわけです。
43分	それが意味するのは，いつまでたっても小さな単位を測ろうとすることはいつまでたっても終わらないということですよね。
52分	この正方形の中に，また正方形が出てしまう。いつまでも繰り返されるんですね。繰り返すとはどういうことかと言うと，永遠に続くということですよ。
54分	最初に１個とれて，次に２個とれて，次に２個とれて…これをこの表示（連分数表記）で表せば，このBDというのは，後は同じ操作がいくらでも続いて，こうなるんです。
55分	だから彼らは計算法を知っていて，いつまでも続くことを知っていたんです。書ききれないから止めたってわけです。ずっと２が続くことを知っていたわけです。
57分	つまり，この場合だと測りたいものと，測るものの間には，新しい共通単位ｐを見つける事は出来ないわけです。見つけられないということは，いつまでたっても厳密には測ることはできないわけです。単位がないんだから。新しい単位があればそれを単位にして測ることができるわけです。
60分	最後は原子みたいなのがあって，原子を単位にしたらいいだろうと，化学の世界ではあっても，数学の場合は，いつまでたっても原子は見つからない。

（かみもと　ゆういち）

【受理日　2024年11月20日】